

DOI: 10.7652/xjtuxb201406013

# 四次拟 Bézier 旋转曲面的构造技术

胡钢<sup>1</sup>, 宋伟杰<sup>2</sup>

(1. 西安理工大学理学院, 710054, 西安; 2. 西北工业大学理学院, 710072, 西安)

**摘要:** 为了方便解决传统旋转曲面计算复杂和形状难以调节的问题,研究了一种带多形状参数的四次拟 Bézier 旋转曲面的构造技术。首先,基于二元超限向量值有理插值函数的重要思想,利用带多形状参数的四次拟 Bézier 曲线作为母线进行旋转曲面的设计;其次,推导了生成整个四次拟旋转曲面的一个显式函数表达式。该方法生成的旋转曲面不仅计算简单而且具有良好的形状可调性,同时还保留了传统 Bézier 旋转曲面的许多几何特性。最后,对所设计的旋转曲面进行了形状与性质分析,并给出了形状控制参数对旋转曲面形状的影响规律。造型实例表明,所提方法不仅直观、高效,而且易于调整旋转曲面的局部形状,在各种旋转曲面的构造与外形设计中将得到十分广泛的应用。

**关键词:** 四次拟 Bézier 曲线;形状参数;旋转曲面;超限向量值有理插值函数

**中图分类号:** TP391.4   **文献标志码:** A   **文章编号:** 0253-987X(2014)06-0074-06

## New Method for Constructing Quartic Quasi-Bézier Rotation Surfaces with Multiple Shape Parameters

HU Gang<sup>1</sup>, SONG Weijie<sup>2</sup>

(1. School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China;  
2. School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** To deal with the problems in adjusting and controlling shapes of rotation surfaces, a new efficient method for quick constructing rotary surfaces with local shape parameters is proposed. Following the essence of transfinite vectored rational interpolating function, the quartic quasi-Bézier rotary surfaces with multiple shape parameters are constructed and the explicit function for quartic quasi-Bézier rotary surfaces is presented. The so constructed surfaces inherit the outstanding properties of the Bézier rotary surfaces with good performance in adjusting local shapes by changing the shape parameters. Some properties of the quartic quasi-Bézier rotary surfaces and applications to surface design are discussed.

**Keywords:** quartic quasi-Bézier curve; shape parameter; rotary surface; transfinite vectored rational interpolating function

Bézier 曲线由于具有许多优良的特性,如今已成为 CAD/CAM 领域用于描述产品形状信息的主要方法之一。近年来,为了弥补 Bézier 曲线曲面造型技术的缺点,人们另辟新径,构造了许多非有理形

式的带形状参数的 Bézier 曲线<sup>[1-10]</sup>。其中,四次拟 Bézier 曲线作为一种新颖的曲线造型方法<sup>[9-10]</sup>,不仅保留了传统 Bézier 曲线的所有优点,同时具有计算复杂度较低和形状灵活可调的特点,所以该曲线

收稿日期: 2013-09-28。 作者简介: 胡钢(1979—),男,副教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51305344);国家自然科学基金重大研究计划培育项目(91120014);陕西省教育厅基金资助项目(2013J K1029)。

网络出版时间: 2014-03-06      网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20140306.1027.002.html>

在 CAD/CAM 领域中将得到广泛的应用<sup>[9-10]</sup>。

为了增强四次拟 Bézier 曲线的造型能力,人们继续研究了该曲线的一些关键技术,如拼接技术<sup>[9]</sup>、形状修改<sup>[10]</sup>等。然而,在航天航空、机械加工、工业设计以及 3D 动画设计等领域会经常遇到旋转曲面的快速生成问题,在现有的 CAD 系统中通常将旋转曲面表示为 Bézier 的参数形式,所以研究 Bézier 旋转曲面的构造技术无疑具有重要理论价值和实际意义。

生成旋转曲面的常用方法一般有基于三维坐标变换法<sup>[11]</sup>、B 样条曲线理论<sup>[12]</sup>、散乱数据三角剖分<sup>[13]</sup>以及轮廓约束的旋转曲面绘制<sup>[14]</sup>等。上述方法生成的旋转曲面存在如下 2 个缺点:①形状可调性有限,即没有考虑旋转曲面局部或整体的形状调整问题,一旦旋转曲面生成,若要修改其形状需要重新设计旋转曲面,操作麻烦且费时、费力,无法更好地满足实际需要;②缺乏显式函数表达式,且计算复杂度较高。

为此,本文基于超限向量值有理插值函数的重要思想,利用带多参数的四次拟 Bézier 曲线,研究了一种带多形状参数的四次拟 Bézier 旋转曲面的几何构造问题。所提方法不仅能够快速、简便地生成任意旋转式曲面,而且可以对所生成的旋转曲面进行整体(或局部)形状调整,较好地解决了旋转曲面形状难以调节的问题。

## 1 四次拟 Bézier 曲线

四次带参 Bézier 曲线<sup>[6-8]</sup>虽然继承了 Bézier 方法几何上的一些优良性质,且形状参数可调,但由于只含单个形状参数使得其形状可调性有限。为此,文献<sup>[10]</sup>在四次带参 Bézier 曲线的基础上给出四次拟 Bézier 曲线的概念。

若给定 4 个控制顶点向量  $\mathbf{P}_j \in \mathbf{R}^d (d=2,3;j=0,1,2,3)$ ,四次拟 Bézier 曲线定义如下<sup>[10]</sup>

$$\mathbf{P}(t;\lambda,\mu) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_j b_{j,4}(t) \quad (1)$$

式中:  $0 \leq t \leq 1, \lambda, \mu \in [-3, 1]$  称为形状参数;四次基函数  $b_{j,4}(t) (j=0,1,2,3)$  为

$$\left. \begin{aligned} b_{0,4}(t) &= (1-\lambda t)(1-t)^3 \\ b_{1,4}(t) &= (3+\lambda-\lambda t)t(1-t)^2 \\ b_{2,4}(t) &= (3+\mu t)t^2(1-t) \\ b_{3,4}(t) &= (1-\mu+\mu t)t^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

显然,当  $\lambda=\mu$  时,式(1)便退化为文献<sup>[6-8]</sup>中的四次带参 Bézier 曲线,这表明该曲线是四次拟

Bézier 曲线的一个特例。不难证明,四次拟 Bézier 曲线同样具有端点性质、凸包性以及几何不变性等几何性质。此外,形状参数  $\lambda, \mu$  对四次拟 Bézier 曲线形状的影响规律也十分明显,即为:①不改变  $\mu$  值,将  $\lambda$  的值慢慢变小(或变大),曲线会慢慢远离(或靠近)它的控制顶点  $\mathbf{P}_1$ ;②不改变  $\lambda$  的值,将  $\mu$  的值慢慢变小(或变大),曲线会慢慢远离(或靠近)它的控制顶点  $\mathbf{P}_2$ ;③  $\lambda, \mu$  的值同时慢慢变小(或变大),曲线会慢慢远离(或靠近)其控制多边形。

类似于传统曲线的光滑拼接,可以推导四次拟 Bézier 曲线间  $G^1, C^1$  连续的充要条件。

**定理 1** 相邻 2 段四次拟 Bézier 曲线  $\mathbf{P}(t;\lambda_1, \mu_1)$  和  $\mathbf{Q}(t;\lambda_2, \mu_2)$  间  $G^1$  连续的充要条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0 &= \frac{3\alpha + \alpha\mu_1}{3 + \lambda_2} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中:  $\alpha > 0$  为任意常数;  $\mathbf{P}_i$  和  $\mathbf{Q}_i (i=0,1,2,3)$  分别为  $\mathbf{P}(t;\lambda_1, \mu_1)$  和  $\mathbf{Q}(t;\lambda_2, \mu_2)$  的控制顶点。

显然,若假设式(3)中  $\alpha=1$ ,则曲线  $G^1$  连续的充要条件退化为曲线  $C^1$  连续的充要条件。四次拟 Bézier 曲线间光滑拼接的一个显著优点是:不用修改曲线  $G^1, C^1$  连续的条件,仅通过修改形状参数(无需调整控制顶点的位置)就可修改拼接后曲线的局部形状。

## 2 超限向量值有理插值函数

对于给定的  $d$  维复向量  $\mathbf{V} \in \mathbf{C}^d$ ,它的 Samelson 逆定义为<sup>[15]</sup>

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^* / \|\mathbf{V}\|^2 \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{V}^*$  为  $\mathbf{V}$  的共轭向量;  $\|\mathbf{V}\|$  为向量  $\mathbf{V}$  的模。

根据式(4)中向量的 Samelson 逆,给出如下形式的二元超限向量值有理插值函数<sup>[15]</sup>

$$\mathbf{R}(s,t) = \frac{\mathbf{N}(s,t)}{q(s,t)} = \mathbf{b}_0(s) + \frac{t-t_0}{\mathbf{b}_1(s) + (t-t_1)/\mathbf{b}_2(s)} \quad (5)$$

其满足如下的插值条件

$$\mathbf{R}(s,t_i) = \frac{\mathbf{N}(s,t_i)}{q(s,t_i)} = \mathbf{V}_i(s), \quad i=0,1,2 \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{N}(s,t) = \{\lambda_1(s,t), \lambda_2(s,t), \lambda_3(s,t)\}$  是三维向量值函数,而  $\lambda_j(s,t) (j=0,1,2)$  和  $q(s,t)$  都是变量  $s, t$  的实函数;  $\mathbf{V}_i(s), \mathbf{b}_i(s) (i=0,1,2)$  都是  $s$  的三维向量值函数;  $t_i (i=0,1,2)$  是实常数。

### 3 四次拟 Bézier 旋转曲面的构造

#### 3.1 算法的描述

本节讨论如何利用二元超限向量值有理插值函数的思想,结合一条分段的四次拟 Bézier 曲线给出一种旋转曲面构造算法,可以快速生成空间任意形状的旋转曲面。下面给出算法的基本步骤。

**步骤 1** 在空间直角坐标系的  $xoy$  平面(其他平面可类似讨论)上,首先构造一条以  $\mathbf{P}_{i,0}$ 、 $\mathbf{P}_{i,1}$ 、 $\mathbf{P}_{i,2}$ 、 $\mathbf{P}_{i,3}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 为控制顶点的分段组合四次拟 Bézier 曲线  $\mathbf{S}_0$ ,并将  $\mathbf{S}_0$  写成向量的形式为

$$\mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i) = \{x_{i,0}(s), y_{i,0}(s), 0\} \quad i=1,2,\dots,n \quad (7)$$

式中: $\mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)$  按式(1)定义,它表示四次拟 Bézier 曲线  $\mathbf{S}_0$  的第  $i$  段曲线,其控制顶点为  $\mathbf{P}_{i,0}$ 、 $\mathbf{P}_{i,1}$ 、 $\mathbf{P}_{i,2}$ 、 $\mathbf{P}_{i,3}$ ;  $\lambda_i, \mu_i$  为形状参数。曲线  $\mathbf{S}_0$  的相邻两段  $\mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)$  和  $\mathbf{V}_{i+1,0}(s;\lambda_{i+1},\mu_{i+1})$  间通常要达到  $G^0$ 、 $G^1$  或  $C^1$  连续。

其次,在  $xoz$  平面(其垂直于  $xoy$  平面)上作曲线  $\mathbf{S}_1$ ,写成向量函数形式为

$$\mathbf{V}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i) = \{x_{i,1}(s), 0, z_{i,1}(s)\} = \{x_{i,0}(s), 0, y_{i,0}(s)\}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (8)$$

式中: $\mathbf{V}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i)$  表示曲线  $\mathbf{S}_1$  的第  $i$  段,该曲线段是由曲线  $\mathbf{S}_0$  的第  $i$  段  $\mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)$  绕着  $x$  轴顺时针旋转  $90^\circ$  得到的。

最后,以  $x$  轴为对称轴  $L$ ,在  $xoy$  平面上作曲线  $\mathbf{S}_0$  关于  $L$  对称的曲线  $\mathbf{S}_2$ ,记为

$$\mathbf{V}_{i,2}(s;\lambda_i,\mu_i) = \{x_{i,2}(s), y_{i,2}(s), 0\} = \{x_{i,0}(s), y_{i,0}(s), 0\}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (9)$$

式中: $\mathbf{V}_{i,2}(s;\lambda_i,\mu_i)$  表示曲线  $\mathbf{S}_2$  的第  $i$  段。从而,得到位于 2 块相互垂直平面( $xoy$  平面和  $xoz$  平面)上的 3 条参数曲线如下

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_0: \mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i) &= \{x_{i,0}(s), y_{i,0}(s), 0\} \\ \mathbf{S}_1: \mathbf{V}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i) &= \{x_{i,0}(s), 0, y_{i,0}(s)\} \\ \mathbf{S}_2: \mathbf{V}_{i,2}(s;\lambda_i,\mu_i) &= \{x_{i,0}(s), -y_{i,0}(s), 0\} \\ 0 \leq s \leq 1; -3 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1; i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

**步骤 2** 将曲线  $\mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)$ 、 $\mathbf{V}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i)$  和  $\mathbf{V}_{i,2}(s;\lambda_i,\mu_i)$  作为 3 个插值条件函数,可构造形如式(5)的超限向量值有理插值函数,步骤如下。

(1) 令  $t_0=0, t_1=0.5, t_2=1$ , 并定义向量函数

$$\mathbf{b}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i) = \mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i), \quad i=1,2,\dots,n \quad (11)$$

(2) 由向量 Samelson 逆的定义,令

$$\mathbf{R}_{i,1}(s,t_1;\lambda_i,\mu_i) = \frac{t_1 - t_0}{\mathbf{V}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i) - \mathbf{b}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)} = \frac{t_1 - t_0}{\mathbf{V}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i) - \mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)}$$

并将  $\mathbf{R}_{i,1}(s,t_1;\lambda_i,\mu_i)$  记为

$$\mathbf{b}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i) = \mathbf{R}_{i,1}(s,t_1;\lambda_i,\mu_i), \quad i=1,2,\dots,n \quad (12)$$

(3) 分别定义

$$\mathbf{R}_{i,1}(s,t_2;\lambda_i,\mu_i) = \frac{t_2 - t_0}{\mathbf{V}_{i,2}(s;\lambda_i,\mu_i) - \mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)}$$

$$\mathbf{R}_{i,2}(s,t_2;\lambda_i,\mu_i) = \frac{t_2 - t_1}{\mathbf{R}_{i,1}(s,t_2;\lambda_i,\mu_i) - \mathbf{b}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i)}$$

并将  $\mathbf{R}_{i,2}(s,t_2;\lambda_i,\mu_i)$  记为

$$\mathbf{b}_{i,2}(s;\lambda_i,\mu_i) = \mathbf{R}_{i,2}(s,t_2;\lambda_i,\mu_i) = (t_2 - t_1) \left[ \frac{t_2 - t_0}{\mathbf{V}_{i,2}(s;\lambda_i,\mu_i) - \mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)} - \frac{t_1 - t_0}{\mathbf{V}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i) - \mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)} \right]^{-1}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (13)$$

(4) 将  $\mathbf{b}_{i,j}(s;\lambda_i,\mu_i)$  ( $j=0,1,2; i=1,2,\dots,n$ ) 代入式(5),即可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_i(s,t;\lambda_i,\mu_i) &= \mathbf{b}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i) + \\ &\frac{t - t_0}{\mathbf{b}_{i,1}(s;\lambda_i,\mu_i) + (t - t_1)/\mathbf{b}_{i,2}(s;\lambda_i,\mu_i)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$0 \leq s, t \leq 1; -3 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1$$

$$i=1,2,\dots,n$$

且满足如下插值条件

$$\mathbf{R}_i(s,t_j;\lambda_i,\mu_i) = \mathbf{V}_{i,j}(s;\lambda_i,\mu_i) \quad j=0,1,2; \quad i=1,2,\dots,n \quad (15)$$

**步骤 3** 对函数  $\mathbf{R}_i(s,t;\lambda_i,\mu_i)$  进行由后向前的有理化,可以得到该函数的显式表达式

$$\mathbf{R}_i(s,t;\lambda_i,\mu_i) = \frac{\mathbf{N}_i(s,t;\lambda_i,\mu_i)}{q_i(s,t;\lambda_i,\mu_i)} = \{r_{i,1}(s,t;\lambda_i,\mu_i), r_{i,2}(s,t;\lambda_i,\mu_i), r_{i,3}(s,t;\lambda_i,\mu_i)\} \quad (16)$$

式中

$$r_{i,1}(s,t;\lambda_i,\mu_i) = x_{i,0}(s)$$

$$r_{i,2}(s,t;\lambda_i,\mu_i) = \frac{1-2t}{2t^2-2t+1} y_{i,0}(s)$$

$$r_{i,3}(s,t;\lambda_i,\mu_i) = \frac{2t-2t^2}{2t^2-2t+1} y_{i,0}(s)$$

由文献[16]中的结论易证明,式(16)所表示的曲面是以参数曲线  $\mathbf{S}_0$  为母线的旋转曲面的一半(证明过程这里不再赘述)。

**步骤 4** 为了生成一个完整的旋转曲面,还需要进一步将  $\mathbf{R}_i(s,t;\lambda_i,\mu_i)$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 中的分量

$r_{i,3}(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  取反号, 即可生成剩余一半的旋转曲面, 记为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i) = \\ \{r_{i,1}(s, t; \lambda_i, \mu_i), r_{i,2}(s, t; \lambda_i, \mu_i), -r_{i,3}(s, t; \lambda_i, \mu_i)\} \\ i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

显然, 曲面  $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  和  $\tilde{\mathbf{R}}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  是关于  $xoy$  平面对称的, 它们合在一起就形成了一个完整的旋转曲面。此外, 用本文方法生成所需形状的旋转曲面后, 可以通过旋转变换及平移变换将所得旋转曲面按任意方位移到任意指定的位置。

### 3.2 旋转曲面的性质

本节讨论四次拟 Bézier 旋转曲面继承的四次拟 Bézier 曲线的许多相关基本性质。

**性质 1** 边界插值性质。由四次拟 Bézier 曲线的端点性质可知, 旋转曲面母线  $\mathbf{S}_0$  的每一段曲线  $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i, \mu_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  均插值它的始末控制顶点  $\mathbf{P}_{i,0}, \mathbf{P}_{i,3}$ , 且  $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i, \mu_i)$  和  $\mathbf{V}_{i+1,0}(s; \lambda_{i+1}, \mu_{i+1})$  的控制顶点满足  $\mathbf{P}_{i,3} = \mathbf{P}_{i+1,0} (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 。从而, 四次拟 Bézier 旋转曲面会插值于由控制顶点  $\mathbf{P}_{i,0}, \mathbf{P}_{i,3} (i = 1, 2, \dots, n)$  分别绕着  $x$  轴旋转一周生成的  $n+1$  个圆。

**性质 2** 凸包性。四次拟 Bézier 旋转曲面位于一个空间的立体凸包之中, 该空间立体凸包是由母线  $\mathbf{S}_0$  的凸包(凸包由母线的控制顶点生成)绕着  $x$  轴旋转一周生成的。

**性质 3** 光滑性。如果旋转曲面的母线  $\mathbf{S}_0$  满足每相邻 2 段  $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i, \mu_i)$  和  $\mathbf{V}_{i+1,0}(s; \lambda_{i+1}, \mu_{i+1})$  间要达到  $G^0, G^1$  或  $C^1$  光滑拼接, 则旋转曲面沿其母线方向也必然达到  $G^0, G^1$  或  $C^1$  光滑拼接。

**性质 4** 逼近性。当  $\lambda, \mu$  同时逐渐增大时, 四次拟 Bézier 曲线逐渐逼近它的控制多边形。所以, 随着参数  $\lambda_i, \mu_i$  同时逐渐增大, 四次拟 Bézier 旋转曲面会逐渐地逼近由其母线  $\mathbf{S}_0$  的控制多边形绕  $x$  轴旋转一周生成的旋转曲面。

### 3.3 形状参数对旋转曲面形状的影响规律

形状参数在本文旋转曲面的形状编辑中起着非常关键的作用, 因此需要分析形状参数的作用与选择方式。因为四次拟 Bézier 旋转曲面含有  $2n$  个独立的形状控制参数  $\lambda_i, \mu_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 所以根据母线所含形状参数的影响规律可知旋转曲面中的形状参数具有的作用, 即通过调整  $\lambda_i, \mu_i$  的值, 可以按  $C_3^3 C_3^3 - 1 = 8$  种方式灵活地调整旋转曲面第  $i$  部分的形状(可以仅调整单个部分的形状, 也可同时调整多部分的形状), 来实现旋转曲面的整体或局部形状

调整。

旋转曲面中形状参数的影响规律为: ①当  $\mu_i$  保持不变,  $\lambda_i$  慢慢变小或变大时,  $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  逐渐地远离或靠近由母线控制顶点  $\mathbf{P}_{i,1}$  绕  $x$  轴旋转一周生成的圆; ②当  $\lambda_i$  保持不变, 随着  $\mu_i$  慢慢地变小或变大,  $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  会慢慢远离或靠近其母线的控制顶点  $\mathbf{P}_{i,2}$  绕  $x$  轴旋转一周生成的圆; ③当形状参数  $\lambda_i, \mu_i$  同时逐渐地变小或变大时, 旋转曲面  $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  逐渐地远离或靠近由母线  $\mathbf{S}_0$  的控制多边形绕  $x$  轴旋转一周生成的控制旋转曲面。

## 4 数值实例

实例 1: 给定  $xoy$  平面上的 8 个控制顶点, 生成 2 段四次拟 Bézier 曲线  $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i, \mu_i) (i = 1, 2)$ , 试求以  $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i, \mu_i)$  为母线, 绕  $x$  轴旋转一周生成的旋转曲面。这里, 母线的控制顶点坐标为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_{1,0} &= (0, 5, 0); & \mathbf{P}_{1,1} &= (5, 10, 0) \\ \mathbf{P}_{1,2} &= (5, 16, 0); & \mathbf{P}_{1,3} &= (10, 20, 0) \\ \mathbf{P}_{2,0} &= \mathbf{P}_{1,3}; & \mathbf{P}_{2,1} &= (20, 15, 0) \\ \mathbf{P}_{2,2} &= (30, 5, 0); & \mathbf{P}_{2,3} &= (40, 10, 0) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

解: 由式(1)可知, 以  $\mathbf{P}_{i,j} (i = 1, 2; j = 0, 1, 2, 3)$  为控制顶点生成的母线  $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i, \mu_i) (i = 1, 2)$  的参数方程为

$$\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i, \mu_i) = \{x_{i,0}(s), y_{i,0}(s), 0\}, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} x_{1,0}(s) &= (15 + 5\lambda_1)s - (15 + 15\lambda_1)s^2 + \\ &\quad (10 + 15\lambda_1 - 5\mu_1)s^3 - (5\lambda_1 - 5\mu_1)s^4 \\ y_{1,0}(s) &= 5 + (15 + 5\lambda_1)s + (3 - 15\lambda_1)s^2 - \\ &\quad (3 - 15\lambda_1 + 4\mu_1)s^3 - (5\lambda_1 - 4\mu_1)s^4 \\ x_{2,0}(s) &= 10 + (30 + 10\lambda_2)s - 30\lambda_2s^2 + \\ &\quad (30\lambda_2 - 10\mu_2)s^3 - (10\lambda_2 - 10\mu_2)s^4 \\ y_{2,0}(s) &= 20 - (15 + 5\lambda_2)s - (15 - 15\lambda_2)s^2 + \\ &\quad (20 - 15\lambda_2 - 5\mu_2)s^3 + (5\lambda_2 + 5\mu_2)s^4 \end{aligned}$$

由 3.1 小节中的结论可知, 以  $\mathbf{V}_{i,0}(s; \lambda_i, \mu_i)$  为母线绕  $x$  轴旋转一周所得旋转曲面方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i) &= \\ \{r_{i,1}(s, t; \lambda_i, \mu_i), r_{i,2}(s, t; \lambda_i, \mu_i), r_{i,3}(s, t; \lambda_i, \mu_i)\} \\ \tilde{\mathbf{R}}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i) &= \\ \{r_{i,1}(s, t; \lambda_i, \mu_i), r_{i,2}(s, t; \lambda_i, \mu_i), -r_{i,3}(s, t; \lambda_i, \mu_i)\} \\ 0 \leq s, t \leq 1; &-3 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1; i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{R}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  与  $\tilde{\mathbf{R}}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  关于  $xoy$  平面

对称,合在一起组成完整的旋转曲面;3个分量 $r_{i,j}(s,t;\lambda_i,\mu_i)(i=1,2;j=1,2,3)$ 的取值分别为

$$\left. \begin{aligned} r_{i,1}(s,t;\lambda_i,\mu_i) &= x_{i,0}(s) \\ r_{i,2}(s,t;\lambda_i,\mu_i) &= \frac{1-2t}{2t^2-2t+1}y_{i,0}(s) \\ r_{i,3}(s,t;\lambda_i,\mu_i) &= \frac{2t-2t^2}{2t^2-2t+1}y_{i,0}(s) \\ -3 &\leq \lambda_i, \mu_i \leq 1; i=1,2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中: $x_{i,0}(s)$ 、 $y_{i,0}(s)$ 取式(18)中的值。

图1~图4分别给出了实例1中当形状参数按不同方式取值时的四次拟Bézier旋转曲面。显然,从图1~图4中可以看出,通过修改式(19)中旋转曲面的形状参数 $\lambda_i$ 、 $\mu_i(i=1,2)$ ,可以方便地按 $(C_3^1)^4-1=80$ 种方式调整旋转曲面的局部形状,无需重新设计旋转曲面,省时省力。

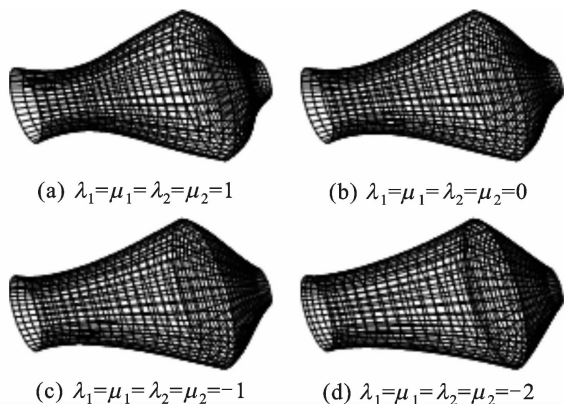


图1 同时改变参数 $\lambda_i$ 、 $\mu_i$ 时的旋转曲面

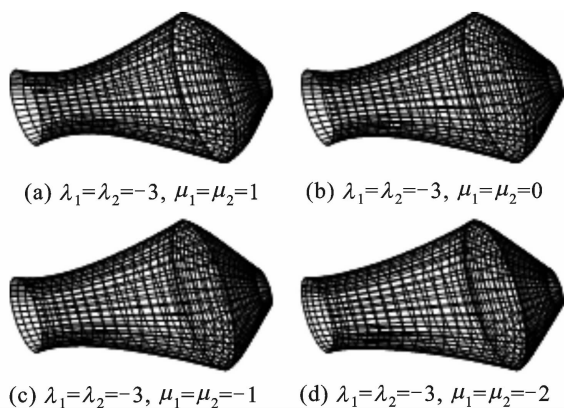


图2 固定参数 $\lambda_i$ 、改变参数 $\mu_i$ 时的旋转曲面

图1~图4中的旋转曲面沿其母线方向只能达到 $G^0$ 光滑连续。若要使旋转曲面达到 $G^1$ 光滑连续,可按式(3)中的 $G^1$ 光滑拼接条件进一步修改式(17)中母线 $\mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i)(i=1,2)$ 的控制顶点坐标。

实例2:试调整实例1中旋转曲面母线的控制顶点坐标,使得生成的旋转曲面沿其母线方向达到

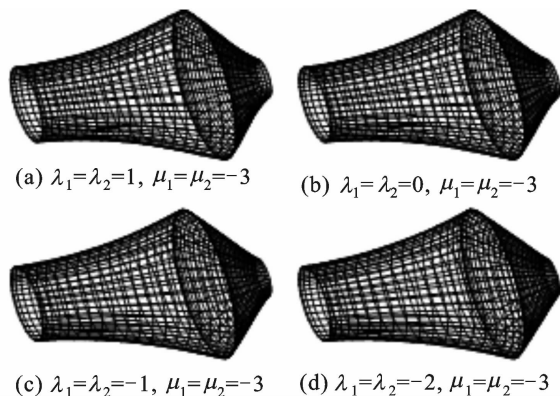


图3 固定参数 $\mu_i$ 、改变参数 $\lambda_i$ 时的旋转曲面

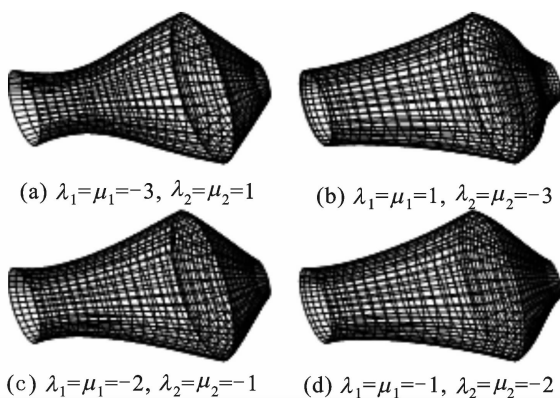


图4 参数 $\lambda_i=\mu_i$ 时的旋转曲面

$G^1$ 光滑连续。

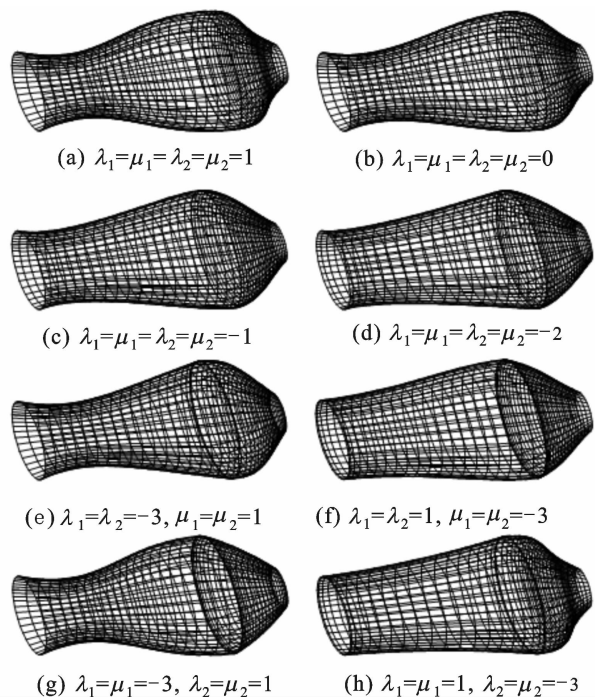
解:为了使旋转曲面沿其母线方向达到 $G^1$ 光滑连续,根据定理1中的结论,首先需要将实例1中母线 $\mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)(i=1,2)$ 的控制顶点调整为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{1,0} &= (0,5,0); & \tilde{\mathbf{P}}_{1,1} &= (5,10,0) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{1,2} &= (5,15,0); & \tilde{\mathbf{P}}_{1,3} &= (10,15,0) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{2,0} &= \tilde{\mathbf{P}}_{1,3}; & \tilde{\mathbf{P}}_{2,1} &= (20,15,0) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{2,2} &= (30,5,0); & \tilde{\mathbf{P}}_{2,3} &= (40,10,0) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

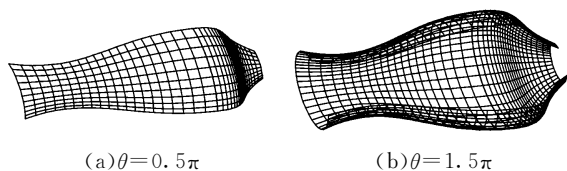
其次以式(21)中的 $\tilde{\mathbf{P}}_{i,j}(i=1,2;j=0,1,2,3)$ 为控制顶点生成新的母线 $\tilde{\mathbf{V}}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)(i=1,2)$ 。最后结合3.1小节中的结论,即可得到以 $\tilde{\mathbf{V}}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)$ 为母线绕 $x$ 轴旋转一周所生成的旋转曲面,详细推导过程类似实例1,这里不再赘述。

图5给出了实例2中当形状参数取不同值时的沿母线方向达到 $G^1$ 连续的旋转曲面。从图5中可以看出,由于旋转曲面具有4个独立的形状参数,故其具有较好的形状可调性。

此外,本文方法还可得到母线 $\mathbf{V}_{i,0}(s;\lambda_i,\mu_i)$ 绕 $x$ 轴旋转某一角度 $\theta(0<\theta<2\pi;\theta\neq\pi)$ 生成的旋转曲面,具体算法为:①当 $0<\theta<\pi$ 时,只需用旋转曲面方程式(16)中的 $\mathbf{R}_i(s,t;\lambda_i,\mu_i)$ 来构造旋转曲面,此

图5 沿母线方向  $G^1$  连续的旋转曲面

时  $t$  的取值范围应限定为  $0 \leq t \leq \theta/\pi$ ; ②当  $\pi < \theta < 2\pi$  时,可先用  $R_i(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  生成半个旋转曲面,然后再用  $\tilde{R}_i(s, t; \lambda_i, \mu_i)$  生成剩余的旋转曲面,此时  $t$  的取值范围应限定为  $0 \leq t \leq (\theta - \pi)/\pi$ 。图6给出了母线绕  $x$  轴旋转  $\theta$  ( $0 < \theta < 2\pi; \theta \neq \pi$ ) 角度生成旋转曲面的实例,图中母线的形状参数和控制顶点取值与图5a中相同。

图6 旋转角度  $\theta$  取不同值时的旋转曲面

## 5 结论

基于超限向量值有理插值函数的重要思想,提出了一种设计四次拟 Bézier 旋转曲面的新方法。该方法具有如下优点:①通过引入形状参数可以修改旋转曲面的形状,极大地增加了旋转曲面造型的自由度;②克服了传统旋转曲面设计方法计算复杂的缺点,算法简单、高效;③给出了生成旋转曲面的显式函数表达式,不仅方便计算旋转曲面上点的坐标,而且有利提高旋转曲面的生成速度。理论分析与造型实例表明,本文方法在各种 CAD/CAM 造型系统中将有着十分广泛的应用价值。

## 参考文献:

- [1] CHEN Q Y, WANG G Z. A class of Bézier-like curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 29-39.
- [2] ORUC H, PHILLIPS G H. q-Bernstein polynomials and Bézier curves [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(1): 1-12.
- [3] HAN Xian, MA Yichen, HUANG Xili. The cubic trigonometric Bézier curve with two shape parameters [J]. Applied Mathematic Letters, 2009, 22(3): 226-231.
- [4] 檀结庆,王燕,李志明. 三次 H-Bézier 曲线的分割、拼接及其应用 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(5): 584-588.  
TAN Jieqing, WANG Yan, LI Zhiming. Subdivision algorithm, connection and applications of cubic H-Bézier curves [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(5): 584-588.
- [5] HAN Xian, MA Yichen, HUANG Xili. A novel generalization of Bézier curve and surface [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217(1): 180-193.
- [6] 胡钢,戴芳,秦新强,等. 四次带参 Bézier 曲线曲面的光滑拼接 [J]. 上海交通大学学报, 2010, 44(11): 1481-1485, 1490.  
HU Gang, DAI Fang, QIN Xinqiang, et al. On continuity conditions for quartic Bézier curves and surfaces with shape parameters [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2010, 44(11): 1481-1485, 1490.
- [7] 吴荣军,彭国华,罗卫民,等. 四次带参 Bézier 曲线的形状分析 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(6): 725-729.  
WU Rongjun, PENG Guohua, LUO Weimin, et al. Shape analysis of quartic Bézier curve with shape parameter [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(6): 725-729.
- [8] 胡钢,段献葆,秦新强,等. 4 次  $\lambda$ -Bézier 曲线的近似合并算法 [J]. 华中科技大学学报, 2011, 37(9): 45-49.  
HU Gang, DUAN Xianbao, QIN Xiqiang, et al. Approximate merging of a pair of quartic  $\lambda$ -Bézier curves with shape parameters [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 2011, 37(9): 45-49.
- [9] 胡钢,秦新强,韩西安,等. 拟三次 Bézier 曲线曲面的拼接技术 [J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(11): 46-50, 60.

(下转第 109 页)